Una quarta trasformazione, importantissima, è quella che si ottiene introducendo $n$ nuove variabili indipendenti Y), $r_{tj}$ , ... 7i$_{n-1}$ e ponendo

$$Rx \qquad Rx \qquad Rx_{n}_$$

Se ne trae immediatamente

donde si conclude intanto che la forinola (i) rappresenta l'elemento lineare di uno spazio di curvatura costante anche quando le $n$ -f- i variabili $x, x_{l}, \ldots x_{n}$ sono indipendenti fra loro e non punto legate dalla relazione (2), salvo che in questo caso il numero delle dimensioni dello spazio è $n$ -f- i e non sussiste più la proprietà che le linee geodetiche sono rappresentate da equazioni lineari *). Ma una conseguenza assai notabile che si deduce dalla espressione (21) è che lo spazio ad $n$ — i dimensioni v) '= cost. ha la sua curvatura *nulla* in ogni punto, poiché il suo elemento lineare ha la forma

$$ds = \text{cost.}\ Va** + àtil + - - - + d\hat{}_{t} \bullet$$

Ed infatti, se si pon mente alla forinola di RIEMANN (19), si vede subito che l'elemento non può ridursi ad essere la radice quadrata della somma dei quadrati di tanti diffe-

è espressa da --- ^—^ , $m$ essendo funzione in generale di p e di 0. Se la variabile $o$ è la lun-

$m$ o p ghezza di un arco geodetico uscente da un punto della superficie nel quale questa abbia una curvatura ordinaria, la funzione $m$ è della forma w = p (i -j- $m^{f}$ p$^{2}$ ) dove $m^{1}$ è una funzione che per p = o non è né nulla né infinita [veggansi p. es. Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, t. I (1867), pag. 358; oppure queste OPERE, voi. I, pag. 342], e quindi la misura della curvatura nel punto p = o è uguale a — 6 $m'_{0}$ . Ciò posto, le coordinate di RIEMANN

^ = p cos 6 , ^$_{2}$ =

p sen O danno all'elemento testé considerato la forma

* y.

epperò la misura della curvatura nel punto p = o è, secondo RIEMANN, -- — lim — - - 4 •

^ra

]Ì$_{m}$ - = $2\, m'$ ; dunque le due espressioni coincidono.
p=o p$^{4}$

È chiaro che $m'_{Q}$ , cioè $(w')_{p==0}$ , dev'essere una quantità indipendente da 6.

*) La forma (21) è stata indicata, per il caso di due sole dimensioni, dal sig. LIOUVILLE, nelle sue note all'opera *Application de l'Analyse a la Geometrie*

di MONGE, pag. 600 (Paris, 1850).